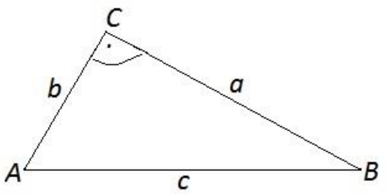
Renata Nowak

MATEMATYKA DLA CIEKAWSKICH

Twierdzenie Pitagorasa inaczej – cz. 2

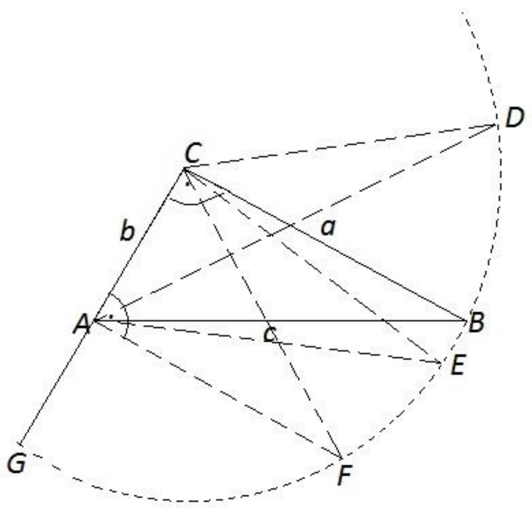
<table>
<tr>
<td>
Wróćmy do twierdzenia Pitagorasa, które dobrze znamy. Mówi ono o związkach między bokami w trójkącie prostokątnym. Może w jego kontekście postawimy inne pytania?



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Jaki zachodzi związek pomiędzy bokami <u>dowolnego</u> trójkąta?
</td>
<td>

$$c < a + b$$

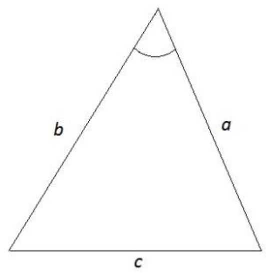
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Weźmy trójkąt prostokątny *ABC* i obróćmy jego bok *BC* dookoła punktu *C*. Jaki zachodzi związek pomiędzy kwadratami długości boków otrzymanych w ten sposób trójkątów?
</td>
<td>


Przez obrót boku *BC* dookoła punktu *C* otrzymamy np. trójkąt <u>rozwartokątny *ACD*,</u> <u>ostrokątny *ACD*</u>, <u>prostokątny ACF</u> lub <u>odcinek *CG*</u>.

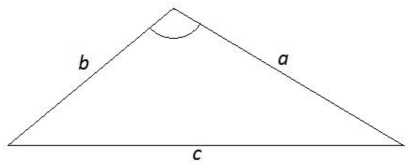
Odcinkiem i trójkątem prostokątnym nie będziemy się zajmować.
</td>
</tr>
</table>

	Dla trójkąta rozwartokątnego np. *ACD* naprzeciwko kąta rozwartego $\sphericalangle ACD$ leży dłuższy jego bok *AD*. Można zauważyć, że: $$\|AD\| > \|AB\|$$ Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że $$\|AB\|^2 = \|AC\|^2 + \|BC\|^2$$ wobec tego: $$\|AD\|^2 > \|AC\|^2 + \|BC\|^2$$ $$\|BC\| = \|CD\|$$ $$\|AD\|^2 > \|AC\|^2 + \|CD\|^2$$
Jaki wniosek możemy wyciągnąć z tych rozważań?	Dla trójkąta rozwartokątnego kwadrat długości boku *AD* jest większy od sumy kwadratów pozostałych boków *AC* i *CD*.
A co z trójkątem ostrokątnym?	Rozpatrując trójkąt ostrokątny np. *ACE* $$\|AE\| < \|AB\|$$ wiemy, że $$\|AB\|^2 = \|AC\|^2 + \|BC\|^2$$ więc $$\|AE\|^2 < \|AC\|^2 + \|BC\|^2$$ $$\|BC\| = \|CE\|$$ $$\|AE\|^2 < \|AC\|^2 + \|CE\|^2$$
Jaki z tego wyciągniemy wniosek?	Dla trójkąta ostrokątnego kwadrat długości boku *AE* jest mniejszy od sumy kwadratów pozostałych boków *AC* i *CE*.
Spróbujmy teraz sformułować wnioski z przeprowadzonego rozumowania, Czy można coś powiedzieć o rodzaju trójkąta porównując sumę kwadrató1) długości dwóch boków i kwadrat długości trzeciego boku?	Jeżeli bok trójkąta leży naprzeciw kąta rozwartego, to kwadrat jego długości jest większy od sumy kwadratów długości pozostałych boków. Jeżeli bok trójkąta leży naprzeciw kąta ostrego, to kwadrat jego długości jest mniejszy od sumy kwadratów długości boków pozostałych. Wiemy, że: Jeżeli bok trójkąta leży naprzeciw kąta prostego, to kwadrat jego długości jest równy sumie kwadratów długości boków pozostałych. Jeżeli kwadrat długości boku trójkąta jest równy sumie kwadratów długości boków pozostałych, to ten bok leży naprzeciw kąta prostego, a więc jest to przeciwprostokątna, trójkąt więc jest prostokątny.
Jak to twierdzenia uzasadnić?	Gdyby ten trójkąt nie był prostokątny, to musiałby być rozwartokątny lub ostrokątny i wówczas kwadrat długości boku leżącego naprzeciwko interesującego nas kąta, byłby bądź większy, bądź mniejszy od sumy kwadratów długości boków pozostałych. Nie byłoby spełnione założenie, że kwadrat długości jego boku jest równy sumie kwadratów długości boków pozostałych. Odkryliśmy i uzasadniliśmy twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

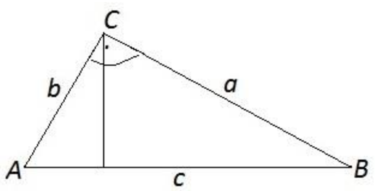
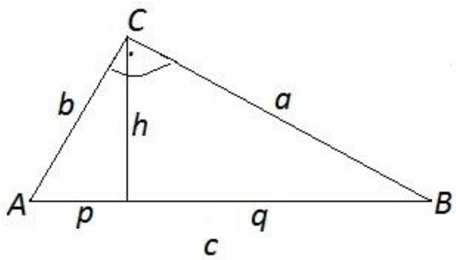
<table>
<tr>
<td>Czy można coś powiedzieć o trójkącie, jeżeli kwadrat długości jednego boku jest różny od sumy kwadratów długości boków pozostałych?</td>
<td>Będzie on ostrokątny lub rozwartokątny.



$$c^2 < a^2 + b^2$$



$$c^2 > a^2 + b^2$$</td>
</tr>
<tr>
<td>W trójkącie prostokątnym poprowadźmy wysokość z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną.


</td>
<td>

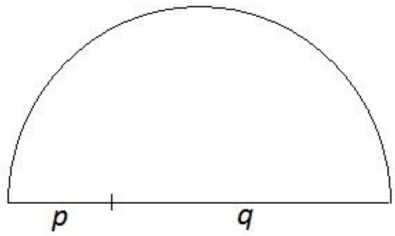
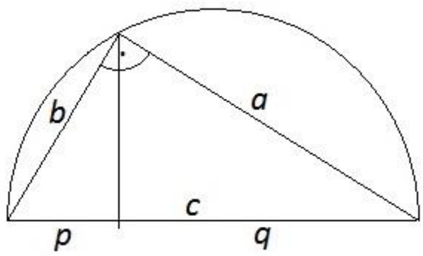
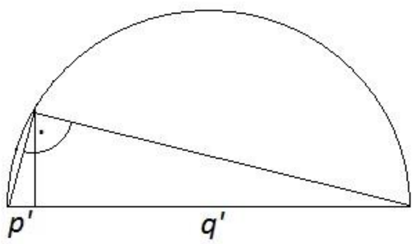
Przypuśćmy, że mamy dane: a, b, c, p, q.

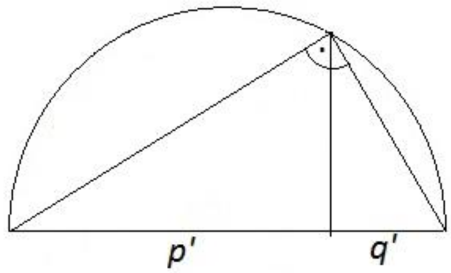
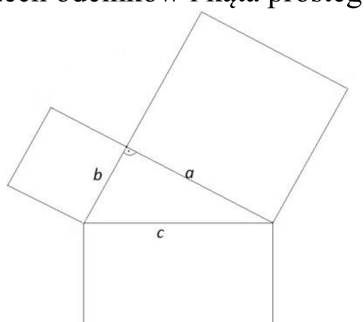
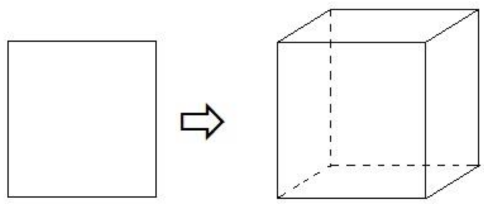
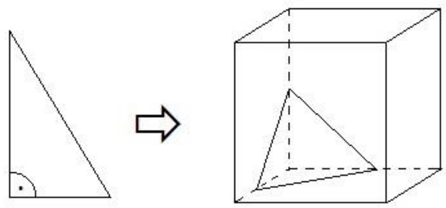
$$b^2 = p^2 + h^2$$
$$a^2 = q^2 + h^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2 = (p+q)^2$$
$$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = p^2 + 2pq + q^2$$
$$2h^2 = 2pq \;|:2$$
$$\underline{h^2 = pq}$$

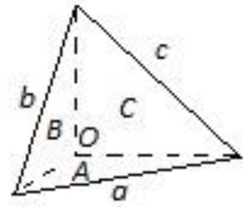
Dzięki prostym obliczeniom doszliśmy do wniosku, że znajomość długości boków nie jest potrzebna. Wystarczy znać długość odcinków, na jakie wysokość podzieliła przeciwprostokątną.

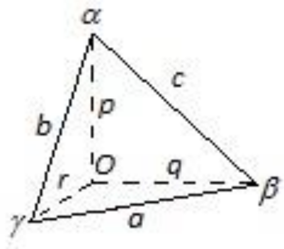
Możemy zatem sformułować twierdzenie:

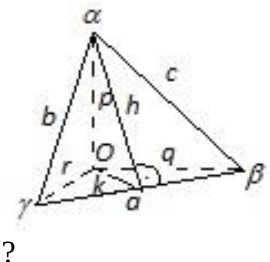
„Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną jest równy iloczynowi długości odcinków, na jakie ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną, którego uzasadnienie jest zamieszczone powyżej.</td>
</tr>
<tr>
<td>Jak widać znajomość długości boków trójkąta do obliczenia jego</td>
<td>Boki trójkąta nie są dowolne, są jednoznacznie wyznaczone przez p i q.</td>
</tr>
</table>

wysokości nie jest potrzebna. Czy boki a i b są wobec tego dowolne?	Wiemy bowiem, że: $$a^2 = p^2 + h^2$$ $$a = \sqrt{p^2 + h^2}$$ $$a = \sqrt{p^2 + pq}$$ $$b = \sqrt{q^2 + pq}$$
Czy mając p i q można zbudować trójkąt prostokątny?	Z wcześniejszych rozważań wiemy, że: $$h^2 = pq$$ Znamy poza tym twierdzenie „Kąt wpisany, oparty na półokręgu jest kątem prostym” Bok *c* potraktujmy jako średnicę okręgu.  Jeżeli poprowadzimy prostą prostopadłą do boku *c* przechodzącą przez punkt wspólny dla odcinków p i q, to odcinek wyznaczony przez punkty przecięcia tej prostej z okręgiem i bokiem *c* będzie wysokością *h* trójkąta. Boki trójkąta będą to odcinki powstałe przez połączenie punktu wspólnego wysokości i okręgu z końcami odcinka *c*. Zinterpretowawszy odcinek *c* trójkąta jako średnicę okręgu, a boki a i b trójkąta jako ramiona kąta wpisanego opartego na półokręgu stwierdzamy na podstawie wyżej przytoczonego twierdzenia, że kąt ten jest kątem prostym, a trójkąt rozpatrywany jest prostokątny. 
A jeżeli dany bok *c* podzielimy na odcinki *p’* i *q’* różne od p i q, czy trójkąt wówczas skonstruowany będzie tym samym trójkątem? Czy wysokość będzie ta sama?	 Z naszej konstrukcji wynika, że uzyskamy inny trójkąt, inna też będzie jego wysokość. Trójkąt

	przystający do danego powstałby tylko w jednym przypadku, gdyby: $q' = p$ $p' = q$ Co jest zilustrowane poniżej 
Głównym tematem naszych rozważań było twierdzenie Pitagorasa ukazujące związek jaki zachodzi pomiędzy bokami trójkąta prostokątnego. Rozpatrywaliśmy go jednak tylko na płaszczyźnie. Czy można by znaleźć analogiczne twierdzenie w przestrzeni? Twierdzenie Pitagorasa dotyczy trójkąta prostokątnego, a więc trzech odcinków i kąta prostego.  $c^2 = a^2 + b^2$ Poszukajmy odpowiedników w przestrzeni.	Odpowiednikiem kwadratu w przestrzeni może być sześcian.  Odpowiednikiem trójkąta prostokątnego jest czworościan powstały przez ucięcie rogu sześcianu płaszczyzną skośną.  Wierzchołkowi kąta prostego w trójkącie na płaszczyźnie odpowiada wierzchołek czworościanu, będący wierzchołkiem trójściennego kąta prostego, gdyż trzy krawędzie czworościanu wchodzące z rozpatrywanego wierzchołka są wzajemnie prostopadłe i tworzą trzy kąty proste. Odpowiednikiem boku może być ściana, długości może być pole, polem może być objętość.
Twierdzenie Pitagorasa odpowiada na pytanie: „Jaki związek zachodzi pomiędzy bokami w trójkącie prostokątnym?” Na jakie pytanie	„Jaki związek zachodzi pomiędzy polami ścian w czworościanie zawierającym trójścienny kąt prosty?”

<table>
<tr><td>mogłoby odpowiadać twierdzenia analogiczne do twierdzenia Pitagorasa w przestrzeni?</td><td></td></tr>
<tr><td>W jaki sposób rozwiązać ten problem?</td><td>
Musimy rozwiązać zadanie:
W czworościanie zawierającym trójścienny kąt prosty przy wierzchołku O są zadane pola A, B, C ścian zbiegających się w O. Znaleźć pole D ściany przeciwległej wierzchołkowi O.


Mamy wyrazić D przez A, B i C. Jest rzeczą naturalną oczekiwać, że poszukiwane wyrażenie będzie analogiczne do równania Pitagorasa
$$c^2 = a^2 + b^2$$
Można by się domyśleć, że:
$$D^3 = A^3 + B^3 + C^3$$
Przyjmując, że odpowiednikiem kwadratu długości (pola) będzie sześcian jego długości (objętość).


W jaki sposób można wyznaczyć pole D trójkąta $\alpha\beta\gamma$?
$$D = \frac{1}{2} a \cdot h$$
$h - wysokość\ trójkąta\ \alpha\beta\gamma$


Jak obliczyć h?
$$h^2 = p^2 + k^2$$
Wiemy, że
$$A = \frac{1}{2} a \cdot k$$
$$A^2 = \frac{1}{4} a^2 \cdot k^2$$
$$4A^2 = a^2 \cdot k^2 \qquad (*)$$
</td></tr>
</table>

	Pójdźmy tą drogą: $$D = \frac{1}{2}a \cdot h$$ $$D^2 = \frac{1}{4}a^2 \cdot h^2$$ $$4D^2 = a^2 \cdot h^2$$ $$4D^2 = a^2(p^2 + k^2) = a^2p^2 + a^2k^2$$ Z $(*)$ $$4D^2 = a^2p^2 + 4A^2$$ Z trójkąta *αβγ*: $$a^2 = r^2 + q^2$$ Podstawiając do poprzedniego równania: $$4D^2 = (r^2 + q^2)p^2 + 4A^2 = r^2p^2 + q^2p^2 + 4A^2$$ Z trójkąta *αγO* i *αβO* $$B = \frac{1}{2}r \cdot p$$ $$B^2 = \frac{1}{4}r^2 \cdot p^2$$ $$4B^2 = r^2 \cdot p^2$$ $$C = \frac{1}{2}q \cdot p$$ $$C^2 = \frac{1}{4}q^2 \cdot p^2$$ $$4C^2 = q^2 \cdot p^2$$ Wracając do interesującego nas równania $$4D^2 = 4B^2 + 4C^2 + 4A^2$$ Zatem $$\underline{D^2 = A^2 + B^2 + C^2}$$ Nasze przypuszczenie okazało się niesłuszne. Odpowiednikiem równania Pitagorasa w przestrzeni jest $$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$ „Jeżeli czworościan zawiera trójścienny kąt prosty, to kwadrat pola ściany przeciwległej temu kątowi jest równy sumie kwadratów pól ścian pozostałych”. Sformułowaliśmy analogiczne twierdzenie Pitagorasa, ale nie utworzyliśmy przewidywanych odpowiedników pojęć z nim związanych. Przypuszczaliśmy bowiem, że odpowiednikiem pola jest objętość.