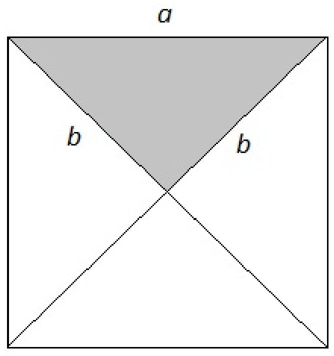
Renata Nowak

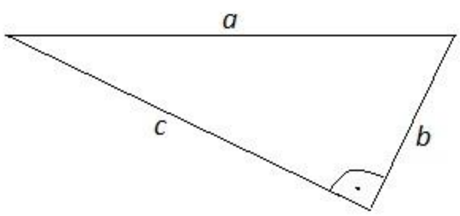
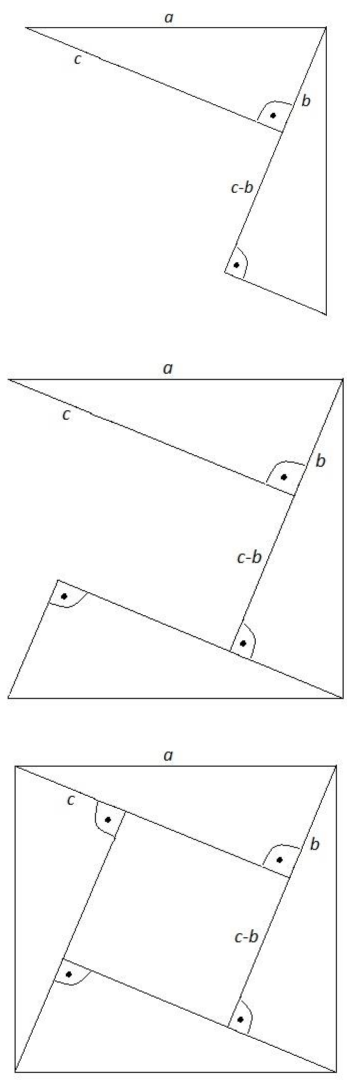
MATEMATYKA DLA CIEKAWSKICH

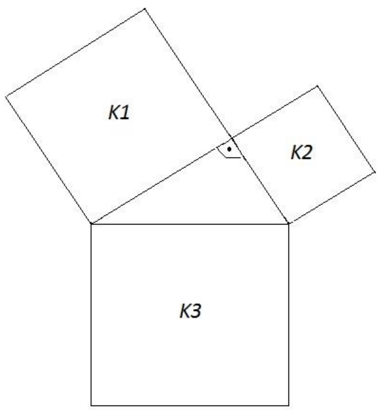
Twierdzenie Pitagorasa inaczej – cz. 1

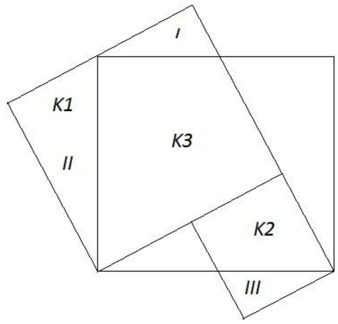
Twierdzenie Pitagorasa, potrzebne do rozwiązywania trójkątów, na ogół jest wprowadzane przez nauczyciela i rzadko bywa na lekcjach dowodzone, a może być ono odkrywane i dowodzone przez samego ucznia, o ile stanie on przed sytuacją problemową, która dotknie zagadnień związanych z trójkątem. Uczeń stawiając sobie pytania nie tylko udowodni twierdzenie Pitagorasa, ale również odkryje ciekawe związki zachodzące w trójkątach. Twierdzenie Pitagorasa poznane w gimnazjum staje się inspiracją do odkrycia wielu innych ciekawych twierdzeń. Wystarczy np. interesujący rysunek, by pobudzić do myślenia i stawiania sobie pytań, na które uczeń poszukuje odpowiedzi. To z kolei stawia go w sytuacji przedłużenia problemu, co prowadzi do kolejnych odkryć, te z kolei stają się podłożem dla powstawania nowych pytań.

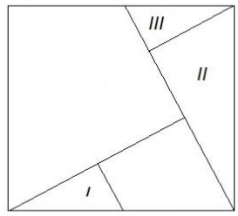
W poniższym wywodzie przedstawiono dialog ucznia z samym sobą. Sytuacja problemowa prowadzi do stawiania sobie pytań i odpowiedzi na nie, co nasuwa kolejne pytania itd. Pokazano jak taki dialog można poprowadzić, by stać się twórcą matematyki, by odkryć i udowodnić ciekawe zależności. Jest on również dla nauczycieli przykładem sposobu prowadzenia toku rozumowania uczniów pobudzających ich do twórczego myślenia, pokazuje jak można sterować procesem nauczania w sposób problemowy, co zachęca uczniów do własnej działalności i pobudza ich aktywność twórczą wynikającą z naturalnej ciekawości świata.

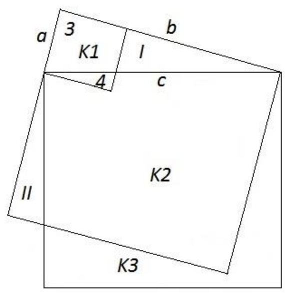
Skonstruujmy rysunek przedstawiony poniżej. Nasuwa się nam pytanie „Jakie jest pole zakreskowanego trójkąta i jaki jest jego związek z polem kwadratu?”  	Obliczamy pole trójkąta $P_{\Delta} = \frac{1}{2}b^2$ Obliczamy pole kwadratu $P_{\Box} = a^2$ $P_{\Box} = 4 \cdot P_{\Delta}$ $P_{\Box} = 4 \cdot \frac{1}{2}b^2 = 2b^2$ Mamy dla trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej a równej bokowi kwadratu i przyprostokątnych b, z których każda jest równa połowie przekątnej tego kwadratu związek $a^2 = b^2 + b^2,$

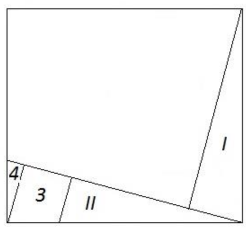
	czyli kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.
Czy taki wynik jest możliwy do uzyskania tylko w ramach wykonanej konstrukcji, czy też jest to ogólniejsza prawidłowość?	Rozpatrując powyższy związek formułujemy hipotezę „związek ten jest prawdziwy dla każdego trójkąta prostokątnego” i dysponujemy wzorem postępowania, który można spożytkować w ogólnym rozumowaniu. Spróbujmy przenosić we fragmentach poprzednią ideę w przypadku, gdy trójkąt jest prostokątny, lecz nie równoramienny. Dla każdego trójkąta prostokątnego można wykonać konstrukcję: 
	

	Na półprostej zawierającej b od jej początku leżącego w wierzchołku kąta ostrego odkładamy odcinek c; w jego końcu wystawiamy prostopadle drugi odcinek b tak jak jest pokazane na rysunku. Rysując przeciwprostokątną otrzymujemy trójkąt prostokątny przystający do trójkąta wyjściowego. Podobnie buduje się trójkąt następny. W ostatnim etapie, który polega na uzupełnieniu figury tak, aby otrzymać czworokąt, również powstaje trójkąt przystający do pozostałych. Czworokąt natomiast okazuje się kwadratem. Przy założeniu, które przyjęliśmy, opisana konstrukcja jest zawsze wykonalna. Co więcej można całe postępowanie rozszerzyć na przypadek szczególny $b = c$, który dał początek rozważaniom. W rezultacie otrzymujemy: $a^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} bc + (c - b)^2 = 2bc + c^2 - 2bc + b^2 = c^2 + b^2$ czyli $a^2 = b^2 + c^2$
Jak można sformułować twierdzenie, które odkryliśmy?	Odkryliśmy TWIERDZENIE PITAGORASA „Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.”
 Rysunek nasuwa pytanie „Jaki związek zachodzi między polami kwadratów?	Z wcześniejszych rozważań wiemy, że dla trójkąta prostokątnego zachodzi związek: $a^2 = b^2 + c^2$ $a - długość\ przeciwprostokątnej$ $b, c - długości\ przyprostokątnych$ Rysunek obok ilustruje związek między polem kwadratu *K3* i sumą pól kwadratów *K1* i *K2* czyli: $P_{K3} = P_{K1} + P_{K2}$
Czy można by udowodnić twierdzenia Pitagorasa korzystając z kwadratów zbudowanych na odpowiednich bokach trójkąta?	Można odpowiednio przykładając kwadraty do boków trójkąta i dzieląc je próbować nałożyć kwadraty zbudowane na przyprostokątnych na kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej trójkąta. Przykład 1.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>




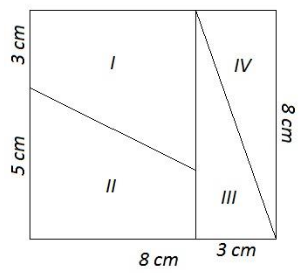
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
Przykład 2.


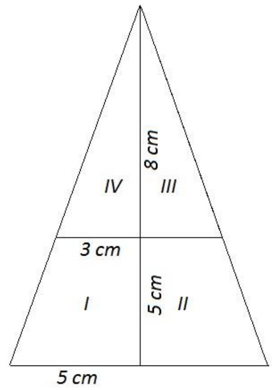


I i II są to części kwadratu zbudowanego na przyprostokątnej o boku b, a 3 i 4 są to części kwadratu zbudowanego na przyprostokątnej o boku a
</td>
</tr>
<tr>
<td>Czy to jest już dowód?</td>
<td>Nasuwa się nam stwierdzenie, że nałożenie się odpowiednich kwadratów jest już dowodem, gdyż rozpatrywaliśmy dowolny trójkąt prostokątny, a nie jakiś szczególny, specjalnie wybrany.</td>
</tr>
<tr>
<td>Ale czy samo stwierdzenie nakładania się wystarczy?</td>
<td>Ufając obserwacji rysunku narażamy się na błąd wynikający z niedokładności. Jako przykład takiego błędu może posłużyć zadanie:</td>
</tr>
</table>

Dany jest kwadrat o boku 8 cm. Czy można tak podzielić ten kwadrat, aby z jego fragmentów utworzyć trójkąt równoramienny?

Rozwiązanie:





Patrząc na rysunek przypuszczamy, że zbudowaliśmy trójkąt równoramienny, ale sprawdźmy dla pewności równość pól obu figur.

$P_{\square} - pole\ kwadratu$

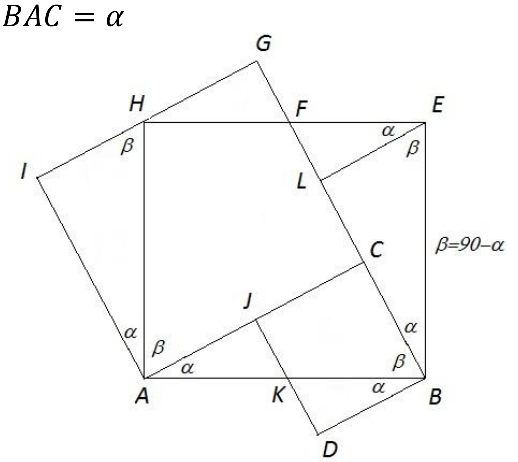
$P_{\Delta} - pole\ trójkąta$

$a - podstawa\ trójkąta$

$h - wysokość\ trójkąta$

$$P_{\square} = 8\ cm \cdot 8\ cm = 64\ cm^2$$
$$a = 5\ cm + 5\ cm = 10\ cm$$
$$h = 8\ cm + 5\ cm = 13\ cm$$
$$P_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{10\ cm \cdot 13\ cm}{2} = 65\ cm^2$$

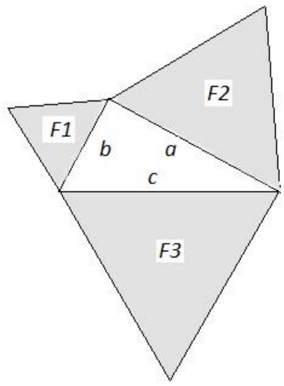
Te figury mają różne pola, zatem możemy wnioskować, że otrzymana figura przez złożenie fragmentów kwadratu nie jest trójkątem, co sugerował rysunek.

<table>
<tr>
<td>W jaki sposób można wykazać, że kwadraty $K1$ i $K2$ rozcięte odpowiednio i nałożone wypełniają wszystkie luki kwadratu $K3$ i nie „nachodzą” na siebie?</td>
<td>Musimy wykazać przystawanie odpowiednich figur.
Zajmijmy się przykładem 1.
Bierzemy dowolny trójkąt prostokątny o kącie $\sphericalangle BAC = \alpha$


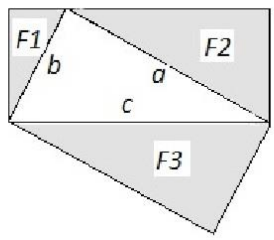
Przypuszczamy, że:
$$\Delta BDK \equiv \Delta EFL \quad (1)$$
$$\Delta AIH \equiv \Delta BLE \quad (2)$$
$$\Delta FGH \equiv \Delta AJK \quad (3)$$
Jeżeli wykażemy, że zachodzą powyższe warunki, udowodnimy tym samym twierdzenie, gdyż rozpatrujemy dowolny trójkąt prostokątny i $P_{K1} + P_{K2} = P_{K3}$. Równość tę otrzymujemy przez nałożenie się odpowiednich kwadratów, a pewność tego, iż takie nakładanie zachodzi uzyskujemy wykazując przystawanie odpowiednich figur.

Wykażemy teraz (1) czyli $\Delta BDK \equiv \Delta EFL$.
Łatwo można dostrzec, że $\Delta ABC \equiv \Delta BEL$ (4), bo:
$$|AB| = |BE|$$
$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle LBE \equiv a$$
$$\sphericalangle BEL \equiv \sphericalangle ABC \equiv 90° - a$$
Z $(4) \implies |BC| = |EL|$ i $|BC| = |BD|$
zatem
$$|BD| = |EL|$$
$$\sphericalangle KBD \equiv \sphericalangle LEF \equiv a$$
$$\sphericalangle BDK \equiv \sphericalangle ELF \equiv 90°$$
więc:
$$\Delta BDK \equiv \Delta EFL$$
W podobny sposób wykażemy przystawanie pozostałych dwóch trójkątów.

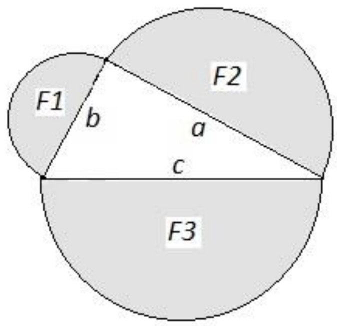
Zatem nasze przypuszczenie okazało się słuszne. Odpowiednie trójkąty rozciętych kwadratów dla dowolnego trójkąta prostokątnego są przystające, wobec tego udowodniliśmy twierdzenie.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Do tej pory rozpatrywaliśmy trójkąt prostokątny i kwadraty zbudowane na jego bokach. Co będzie, gdy na bokach zbudujemy inne figury np. trójkąty równoboczne, trójkąty prostokątne, półkola?</td>
<td>


Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Nasuwa się przypuszczenie, że:

$$P_{F3} = P_{F1} + P_{F2}$$

W przypadku trójkątów na rys. 1 i rys. 2 nakładając odpowiednie figury możemy łatwo wykazać, że równość ta jest prawdziwa.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Czy te figury są przypadkowe? Czy dowolne np. trójkąty możemy budować na bokach danego trójkąta prostokątnego.</td>
<td>Figury te muszą mieć ten sam kształt, lecz niekoniecznie te same wymiary, czyli są figurami podobnymi.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dla figur podobnych określamy skalę podobieństwa. Jaka ona będzie w przypadku rozpatrywanych przez nas figur?</td>
<td>Wiemy o tym, że skalę podobieństwa określa stosunek długości odpowiednich fragmentów figur podobnych (w przypadku wielokątów – odpowiednich boków). Wobec tego figura:
$F1$ jest podobna do $F2$ w stosunku $\frac{b}{a}$. $(F1 \sim F2)$,
$F2$ jest podobna do $F3$ w stosunku $\frac{a}{c}$. $(F2 \sim F3)$,
$F3$ jest podobna do $F1$ w stosunku $\frac{c}{b}$. $(F3 \sim F1)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Jaki wniosek możemy wyciągnąć z tych rozważań?</td>
<td>Jeżeli dany mamy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b, i przeciwprostokątnej c i figury podobne $F1, F2, F3$ o skali podobieństwa</td>
</tr>
</table>

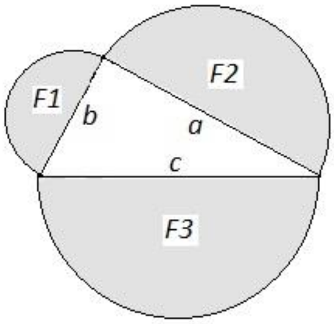
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$\frac{b}{a}\ (F1\sim F2)$$
$$\frac{a}{c}\ (F2\sim F3)$$
$$\frac{c}{b}\ (F3\sim F1),$$

to spełniony jest następujący warunek:

$$P_{F3}=P_{F1}+P_{F2}$$

Zobrazować to możemy w następujący sposób:



</td>
</tr>
<tr>
<td>Jak to udowodnić?</td>
<td>

Skorzystamy z twierdzenia „Stosunek pól dwóch figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych figur”

Więc:

$$P_{F2}=\frac{b^2}{a^2}\cdot P_{F1}$$
$$P_{F3}=\frac{c^2}{b^2}\cdot P_{F2}=\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot P_{F1}$$
$$P_{F3}=\frac{c^2}{a^2}\cdot P_{F1}\qquad(1)$$

$$P_{F3}=\frac{b^2}{a^2}\cdot P_{F1}+P_{F1}=\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)P_{F1}$$
$$P_{F3}=\frac{b^2+a^2}{a^2}\cdot P_{F1}\qquad(2)$$

Z (1) i (2)

$$\frac{c^2}{a^2}\cdot P_{F1}=\frac{b^2+a^2}{a^2}\cdot P_{F1}$$
$$c^2=b^2+a^2,$$

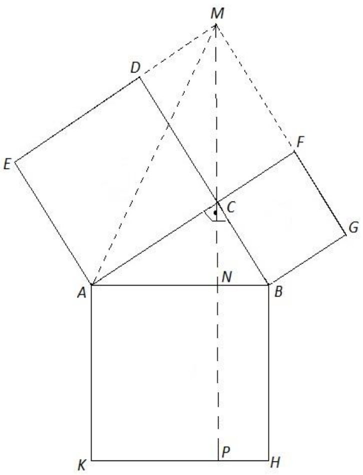
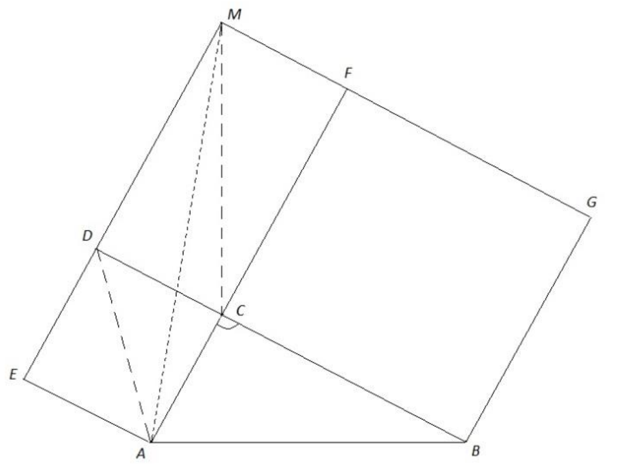
czyli

$$P_{F1}+P_{F2}=P_{F3}$$

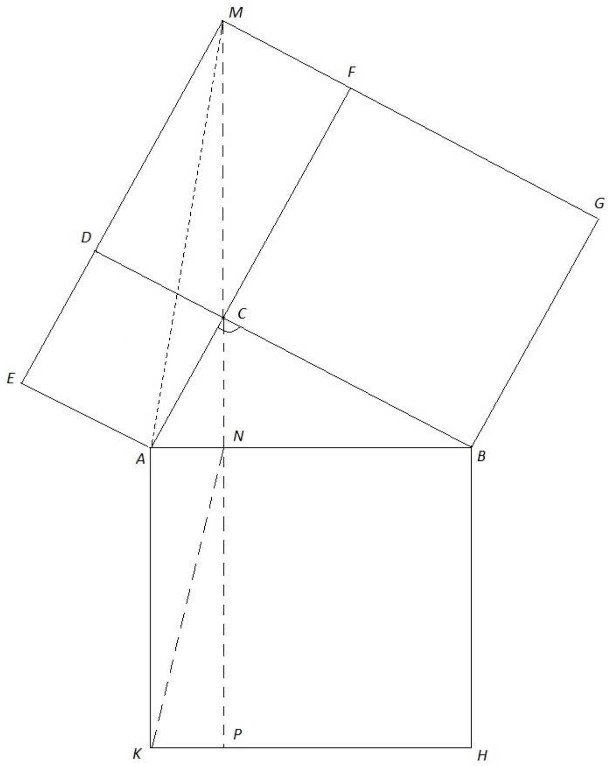
jest to **UOGÓLNIONE TWIERDZENIE PITAGORASA**

</td>
</tr>
</table>

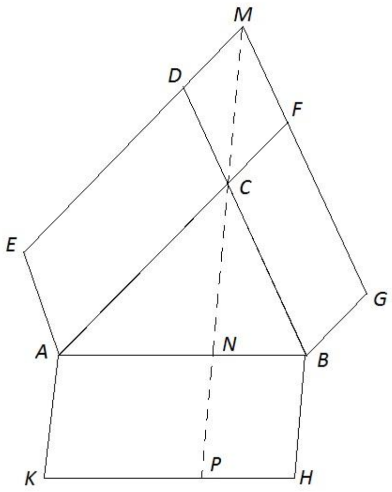
<table>
<tr>
<td>A może w trójkącie, na bokach którego zbudowaliśmy kwadraty poprowadzimy kilka odcinków. Czy otrzymany rysunek coś nam zasugeruje


</td>
<td>Można przypuszczać, że
$$P_{AEDC} = P_{ANPK}$$
i
$$P_{BCFG} = P_{PHBN}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Ale jak to wykazać? Czy istnieje jakiś związek między trójkątem ACM a pozostałymi figurami przedstawionymi na rysunku?</td>
<td>

$$P_{\Delta ADC} = P_{\Delta ACM}$$
$$P_{\Delta ADC} = \frac{|AC|\cdot|CD|}{2}$$
$$\left.\begin{aligned} P_{\Delta ACM} &= \frac{|AC|\cdot|MF|}{2}\\ |MF| &= |CD| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow P_{\Delta ACM} = \frac{|AC|\cdot|CD|}{2}$$
Zatem $P_{AEDC} = 2P_{\Delta ACM} \quad (*)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Co sugeruje przypuszczenie?</td>
<td>Przypuszczenie sugeruje, że
$$P_{ANPK} = 2P_{\Delta ACM}$$</td>
</tr>
</table>

Czy można wykazać tę równość?	 W analogiczny sposób można wykazać, że: $P_{\Delta AKN} = P_{\Delta ACM}$ $P_{ANPK} = 2P_{\Delta ACM}$ zatem na podstawie tej równości i (*) $P_{AEDC} = P_{ANKP}$
Z czego korzystaliśmy udowadniając tę równość?	Przy udowadnianiu tej równości korzystaliśmy z tego, że rozpatrywane pary trójkątów *ADC* i *ACM* oraz *AKN* i *ACM* miały równe podstawy i równe wysokości. Posługiwaliśmy się poza tym wzorem wyrażającym pole trójkąta i pojęciem równości pól.
Skąd mamy pewność, że trójkąty *AKN* i *ACM* mają równe podstawy i wysokości?	Wiemy, że $\lvert MC \rvert = \lvert AK \rvert,$ gdzie: *MC* i *AK* – podstawy. Ponieważ: $\lvert AC \rvert = \lvert CD \rvert$ $\lvert DM \rvert = \lvert CF \rvert = \lvert CB \rvert \ cecha\ (bkb)$ $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle CDM \equiv 90°$ czyli $\Delta CMD \equiv \Delta ABC$ zatem: $\left.\begin{matrix} \lvert MC \rvert = \lvert AB \rvert \\ \lvert AB \rvert = \lvert AK \rvert \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lvert MC \rvert = \lvert AK \rvert$ Wiemy też, że wysokości trójkątów *AKN* i *ACM* są równe, bo $CM \parallel AK$. Odległość prostych *CM* i *AK* jest wysokością dla każdego z trójkątów *AKN* i *ACM.*

	Równoległość tych prostych można wykazać w następujący sposób: $$\sphericalangle DCM \equiv \sphericalangle CAB$$ $$\sphericalangle DCM + \sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAK$$ czyli $$\sphericalangle ACM = \sphericalangle CAK$$ Kąty te są naprzemianległe przy prostych *CM* i *AK* przeciętych prostą *AC*, zatem $$CM \parallel AK$$
Czy powyższe rozważania pomogą w udowodnieniu twierdzenia Pitagorasa?	Udowodniliśmy, że $$P_{AEDC} = P_{ANKP}$$ w analogiczny sposób wykazujemy, że $$P_{BCFG} = P_{BHDN}$$ zatem $$P_{ACDE} + P_{BCFG} = P_{ABHK}$$ czyli $$\lvert AC\rvert^2 + \lvert BC\rvert^2 = \lvert AB\rvert^2$$ Udowodniliśmy więc twierdzenie Pitagorasa.
Z czego korzystaliśmy udowadniając równość i równoległość odcinków *MC* i *AK*?	Przy udowadnianiu tej równości i równoległości posługujemy się pojęciem równości odcinków oraz pojęciem równości kątów i opieramy się na własnościach odcinków lub kątów równych, między innymi o przystawaniu trójkątów. Korzystaliśmy też z założenia, że trójkąt *ABC* jest prostokątny oraz że czworokąty zbudowane na jego bokach są kwadratami.
Z czego korzystaliśmy w pozostałej części twierdzenia Pitagorasa?	W pozostałej części dowodu korzystaliśmy z pojęcia równości pól oraz opieraliśmy się na twierdzeniach dotyczących porównywania pól trójkątów i równoległoboków.
Czy korzystaliśmy z założenia, że trójkąt *ABC* jest prostokątny?	Z tego założenia nie korzystaliśmy, ani z tego, że czworokąty *ACDE, BCFG, ABHK* są kwadratami, wystarczy wiedzieć, że są to równoległoboki.
Czy można to rozumowanie zastosować do figur ogólniejszych?	Można by wziąć dowolny trójkąt i zbudować na jego bokach równoległoboki. Pokazane jest to na rysunku.

	
Czy równoległoboki te mogą być dowolne?	Równoległoboki *ACDE* i *BCFG* mogą być dowolne, natomiast na boku *AB* budujemy równoległobok w ten sposób, że bok $AK \parallel MC$ (*M* – punkt przecięcia prostych *ED* i *GF*) i $\lvert AK \rvert = \lvert MC \rvert$.
Jak można by sformułować twierdzenie, które odkryliśmy?	„Jeżeli na bokach trójkąta *ABC* zbudujemy dowolne równoległoboki *ACDE* i *BCFG*, a na boku *AB* trzeci równoległobok *ABHK* w ten sposób, że bok *AK* jest równoległy do *MC* i równy odcinkowi *MC*, to suma pól dwóch pierwszych równoległoboków jest równa polu trzeciego równoległoboku”.
Jak będzie wyglądał dowód tego twierdzenia?	Dowód tego twierdzenia będzie analogiczny do dowodu twierdzenia Pitagorasa przedstawionego wcześniej.
Czy można otrzymać twierdzenia Pitagorasa z powyższego twierdzenia?	W twierdzeniu powyższym mowa jest o dowolnym trójkącie i równoległobokach takich, że zachodzi równość $P_{AEDC} + P_{CFGB} = P_{ABHK}$ Gdy rozpatrzymy trójkąt prostokątny i równoległoboki, które będą kwadratami, zachodzić będzie wówczas równość $P_{\square AEDC} + P_{\square CFGB} = P_{\square ABHK}$ $P_{\square} - pole\ kwadratu.$
Skąd wiadomo, że figura *ABHK* jest kwadratem?	Wiemy z wcześniejszych rozważań, że dla kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego zachodzi warunek: $\Delta CMD \equiv \Delta ABC$ zatem $\left.\begin{array}{l} \lvert MC \rvert = \lvert AB \rvert \\ \lvert MC \rvert = \lvert AK \rvert \end{array}\right\} \Rightarrow \lvert AB \rvert = \lvert AK \rvert$ Figura zbudowana na przyprostokątnej ma równe

	boki. Musimy jeszcze wykazać, że $$AB \perp AK$$ $$\Delta CMD \equiv \Delta ABC \quad \Longrightarrow$$ $$\sphericalangle DCM \equiv \sphericalangle CAB \quad (1)$$ $$\sphericalangle NCB \equiv \sphericalangle DCM \quad (2)$$ (2) kąty wierzchołkowe są równe. Z (1) i (2) $$\left.\begin{matrix}\sphericalangle NCB \equiv \sphericalangle CAB \\ \sphericalangle NBC \equiv \sphericalangle ABC\end{matrix}\right\} \quad (3)$$ Z informacji, że trójkąt *ABC* jest prostokątny i z warunku (3) wynika, że trójkąt *CBN* jest również prostokątny. Zatem $$MC \perp AB$$ z założenia $$MC \parallel AK$$ Więc $$AK \perp AB$$ Udowodniliśmy więc, że czworokąt *ABHK* jest kwadratem. Prawdziwy jest zatem warunek $$\lvert AC\rvert^2 + \lvert BC\rvert^2 = \lvert AB\rvert^2$$ Udowodniliśmy więc, że z powyżej odkrytego twierdzenia można otrzymać twierdzenie Pitagorasa.