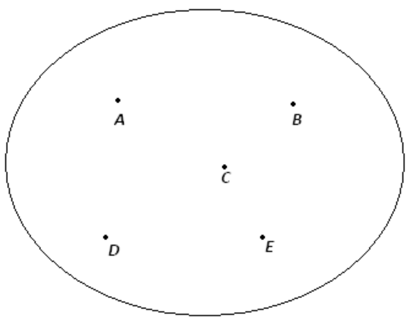
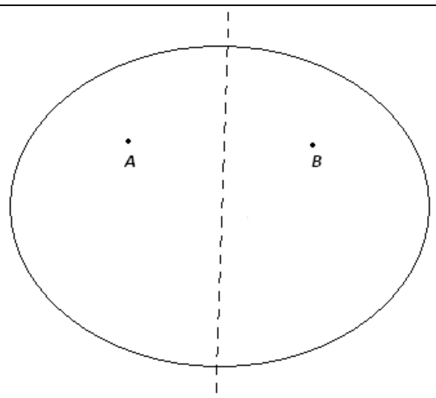
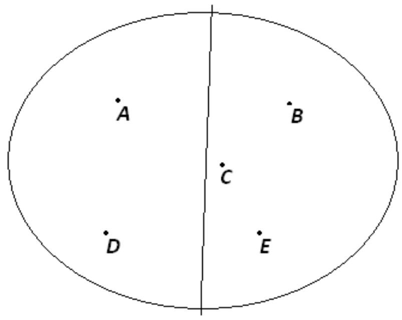
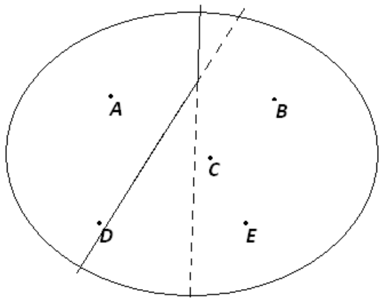
MATEMATYKA DLA CIEKAWSKICH

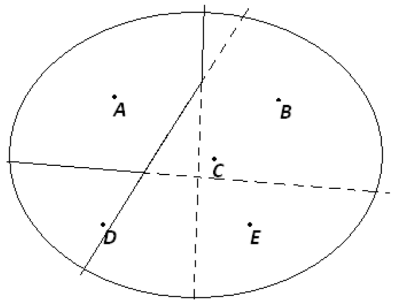
Dowodzenie twierdzeń przy pomocy kartki.

Część II

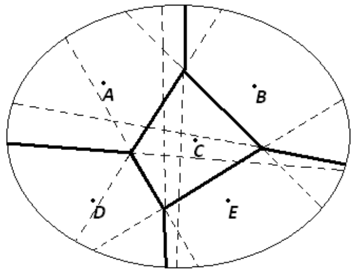
Na rysunku przedstawiony jest obszar pewnego miasta wraz z zaznaczonymi szkołami podstawowymi. Wyobraźmy sobie, że mamy przydzielić do nich uczniów zgodnie z zasadą, że każde dziecko powinno uczęszczać do szkoły położonej najbliżej swojego miejsca zamieszkania. W jaki sposób można znaleźć granice między tymi „rejonami miasta” 	
Rozważmy najpierw ten problem w wersji uproszczonej. Tym razem w pewnym interesującym nas mieście znajdują się tylko dwie szkoły, mogą to być np. szkoły *A* i *B*. Należy ustalić, z jakiego terenu dzieci będą chodzić do tych szkół.	 Linia będąca symetralną odcinka $\overline{AB}$ (którą można otrzymać zginając kartkę z planem miasta tak, aby punkty *A* i *B* pokryły się) dzieli miasto na dwie części. W każdej z nich znalazła się jedna szkoła i wszystkie domy położone bliżej tej właśnie szkoły.
Skąd to wiadomo?	Jeśli weźmiemy dowolny punkt nie należący do symetralnej, to musi on leżeć bliżej jednego z końców odcinka, ponieważ jedynymi punktami

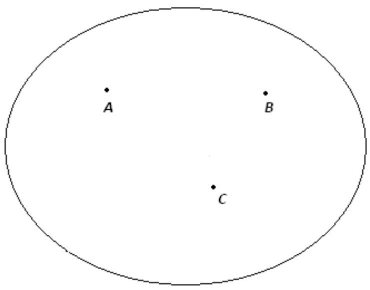
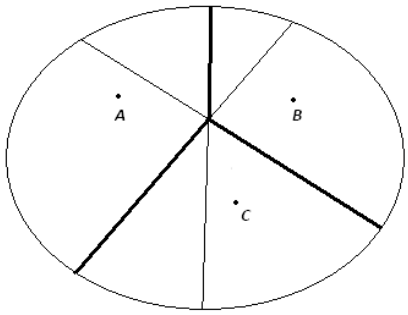
<table>
<tr><td></td><td>leżącymi w równej odległości od końców odcinka są punkty symetralnej, co wynika z jej własności. Zatem warunek zadania jest spełniony, gdy granicą podziału miasta jest symetralna odcinka $\overline{AB}$.</td></tr>
<tr><td>Czy istnieją uczniowie, którzy będą mogli wybrać sobie szkołę, do której chcą uczęszczać?</td><td>Możliwość wyboru szkoły mają tylko te dzieci, których domy leżą w jednakowej odległości od obu szkół a więc domy znajdujące się na linii podziału.</td></tr>
<tr><td>Wróćmy do ogólnego problemu. Mamy podzielić miasto na pięć „rejonów szkolnych”, tak aby w każdym była jedna szkoła i wszystkie te domy, z których do niej jest najbliżej.</td><td>Spróbujmy zastosować metodę postępowania poznaną przy okazji podziału miasta z dwiema szkołami. W tym celu zbudujmy linie podziału oddzielające poszczególne szkoły od siebie.
Zacznijmy od szkół A i B.


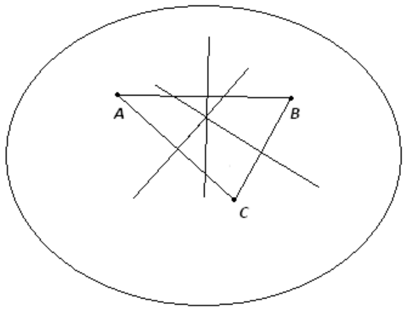
Teraz podzielimy miasto między szkoły A i C oraz A i D.




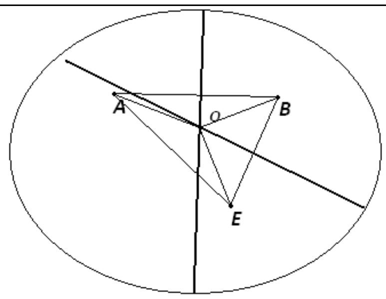
Widzimy, że na obszarze wokół punktu A ograniczonym liniami podziału znajdują się domy położone bliżej szkoły niż szkół B, C i D. Postępując dalej w ten sposób uzyskamy końcowy podział miasta na „rejony szkolne” przedstawiony na rysunku poniżej.</td></tr>
</table>

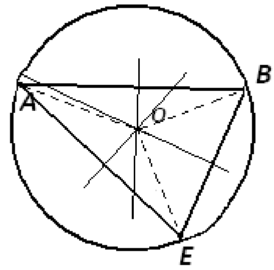
<table>
<tr><td></td><td>

Można zauważyć, że symetralna odcinka $\overline{AE}$ nie jest potrzebna, ponieważ wcześniejsze podziały w pełni ograniczyły fragment miasta, który zgodnie z przyjętymi kryteriami, jest przyporządkowany szkole.</td></tr>
<tr><td>Czy istnieją uczniowie, którzy mogą wybrać między dwiema szkołami?</td><td>Uczniowie tacy mieszkają na granicy rejonów.</td></tr>
<tr><td>Do których szkół mogą uczęszczać uczniowie, którzy mieszkają w punktach przecięcia się aż trzech linii podziału?</td><td>Uczniowie ci będą mogli wybrać między trzema szkołami.</td></tr>
<tr><td>Na rysunku poniżej ponownie przedstawiamy zarys miasta z trzema szkołami. Powtórzmy dla nich konstrukcję linii podziału. Czy coś ciekawego zauważymy?

</td><td>

Można zauważyć, że powstałe w wyniku konstrukcji linie podziału przecinają się w jednym punkcie.</td></tr>
<tr><td>Czy rzeczywiście punkt ten należy do wszystkich trzech symetralnych?</td><td>O tym, że punkt ten należy do wszystkich trzech symetralnych można się przekonać porównując odległości tego punktu od punktów A, B, C.</td></tr>
<tr><td>Połączmy punkty symbolizujący szkoły i spróbujmy wyciągnąć jakieś wnioski.</td><td>

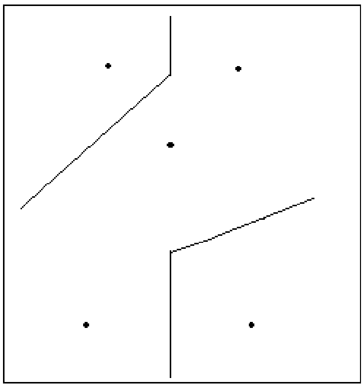
Jeżeli punkty symbolizujące szkoły połączymy odcinkami, to zbudujemy trójkąt, dla którego są one wierzchołkami. Zbudowane wcześniej linie są symetralnymi boków tego trójkąta i, jak to wcześniej sprawdziliśmy przecinają się w jednym punkcie.</td></tr>
</table>

Czy inne trójkąty również posiadają taką własność?	Wróćmy do sytuacji przedstawiającej podział miasta z pięcioma szkołami na „rejony szkolne”. Każde trzy zaznaczone na rysunku niewspółliniowe punkty wyznaczają trójkąt. Wybierzmy dowolny z tych trójkątów, dla których zbudowaliśmy wcześniej wszystkie symetralne boków. Również przecinają się one w jednym punkcie.
Czy można w oparciu o zbadane konkretne przypadki sformułować jakąś hipotezę?	**W dowolnym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie.**
Czy nasze spostrzeżenie będzie słuszne dla trójkąta *ABE*, z rysunku z pięcioma szkołami, dla którego zbudowano tylko dwie symetralne?	 Oznaczmy przez *O* punkt przecięcia się tych dwóch symetralnych, czyli symetralnych boków $\overline{AB}$ i $\overline{BE}$. Punkt *O* należy do symetralnej boku $\overline{AB}$ zatem $$\|OA\| = \|OB\|$$ Podobnie punkt *O* należy do symetralnej boku $\overline{BE}$ zatem $$\|OB\| = \|OE\|.$$ Ponieważ $\|OA\| = \|OB\|$ i $\|OB\| = \|OE\|$, to z tego wynika, że $\|OA\| = \|OE\|$, czyli punkt *O* jest równo oddalony od wierzchołków *A* i *E*, należy zatem do symetralnej boku $\overline{AE}$. To proste rozumowanie można poprzeć doświadczeniem przez zginanie kartki wzdłuż odpowiednich symetralnych i nakładanie rozpatrywanych odcinków na siebie. Wszystkie one są co do długości równe. Prawdą jest więc, że trzy symetralne boków trójkąta *ABE* posiadają punkt wspólny. Trójkąt ten był dowolnie wybrany, zatem przytoczone rozumowanie jest w pełni ogólne.
Wiemy o tym, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest równo odległy od wierzchołków tego trójkąta. Czy nasuwa się jakieś spostrzeżenie?	Można potraktować odcinek łączący punkt *O* z dowolnym wierzchołkiem, np. $\overline{OA}$ jako promień okręgu. Będą do niego należeć również punkty *B* i *E*.

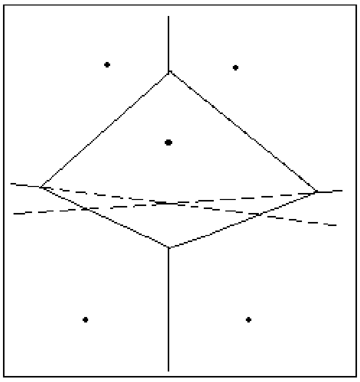
<table>
<tr><td></td><td>

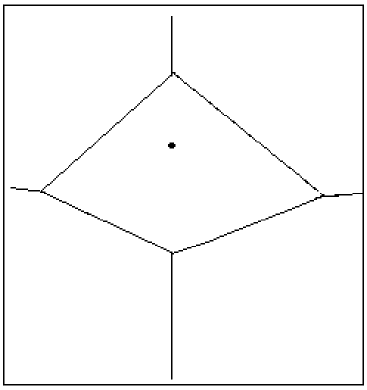
Okrąg taki nazywa się opisanym na trójkącie, a jego środek czyli punkt przecięcia się symetralnych, umiemy zbudować dzięki prostemu zginaniu kartki.</td></tr>
<tr><td>A oto następny problem.
Na rysunkach poniżej przedstawione są niekompletne podziały. Na niektórych brakuje linii podziału, na innych szkół, a na niektórych zarówno szkół jak i granic terytoriów. Spróbujmy uzupełnić te rysunki.</td><td></td></tr>
</table>

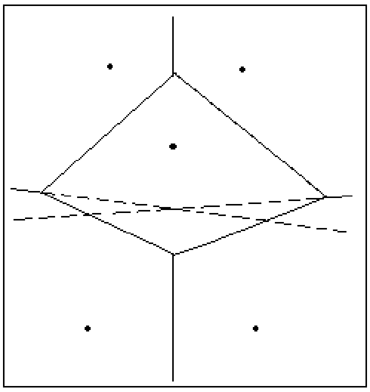
Zadanie do uzupełnienia

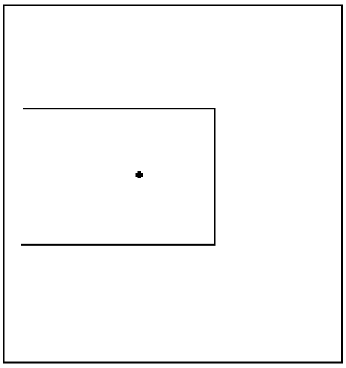


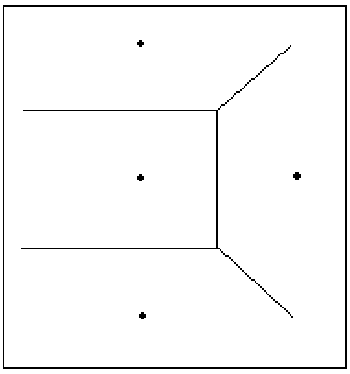
Odpowiedź

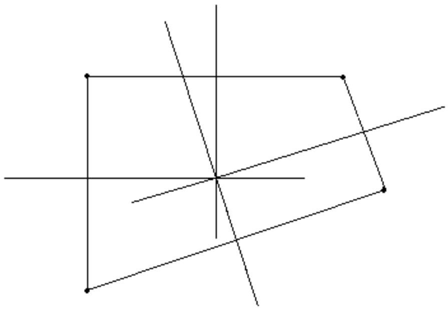
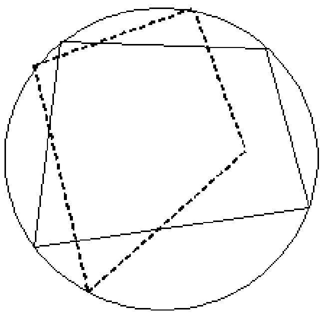




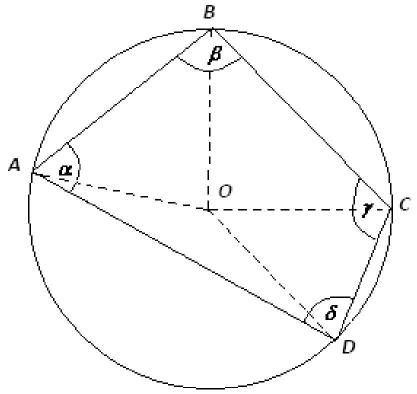






W przytoczonych przykładach wielokrotnie pytaliśmy o punkty równoodległe od dwóch czy trzech szkół. W jaki sposób powinny być położone względem siebie cztery szkoły, aby istniała możliwość zbudowania budynku równoodległego ognich wszystkich?	Linie podziału muszą przecinać się w jednym punkcie. Może to być np. sytuacja przedstawiona poniżej.  Jak wiemy punkty symetralnych odcinka są równo oddalone od jego końców. Nasuwa się wniosek, że względu na to, że wszystkie wierzchołki otrzymanego czworokąta są równo oddalone od punktu przecięcia symetralnych boków, że na tym czworokącie da się opisać okrąg.
Czy na każdym czworokącie można opisać okrąg?	Poniższy rysunek pokazuje, że istnieją czworokąty na których nie można opisać okręgu. 

<table>
<tr>
<td>A na jakich czworokątach można opisać okrąg?</td>
<td>



Odcinki $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ są promieniami, są zatem równe, wobec tego $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COD, \Delta DOA$ są równoramienne. Dwa kąty każdego z tych trójkątów są równe.

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$$
$$\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB$$
$$\sphericalangle OCD = \sphericalangle ODC$$
$$\sphericalangle ODA = \sphericalangle OAD$$

Dodajmy te kąty stronami.

$$\sphericalangle OAB + \sphericalangle OBC + \sphericalangle OCD + \sphericalangle ODA = \sphericalangle OBA + \sphericalangle OCB + \sphericalangle ODC + \sphericalangle OAD$$

Poza tym

$$\sphericalangle OAB + \sphericalangle OAD = \alpha$$
$$\sphericalangle OBA + \sphericalangle OBC = \beta$$
$$\sphericalangle OCB + \sphericalangle OCD = \gamma$$
$$\sphericalangle ODC + \sphericalangle ODA = \delta$$

Z obu tych warunków wnioskujemy, że

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

Możemy zatem wysnuć wniosek, że **okrąg można opisać na czworokątach, w których sumy przeciwległych boków są równe**.

</td>
</tr>
</table>