

# MATEMATYKA DLA CIEKAWSKICH

## Dowodzenie twierdzeń przy pomocy kartki.

### Część I

Z trójkątem, jako figurą geometryczną, uczeń spotyka się już na etapie nauczania początkowego. W czasie dalszego procesu kształcenia poznaje on jego własności, nowe pojęcia i twierdzenia z nim związane.

W rozważaniach moich zakładam, że uczeń zna niektóre pojęcia związane z trójkątem, pewne jego własności takie jak:

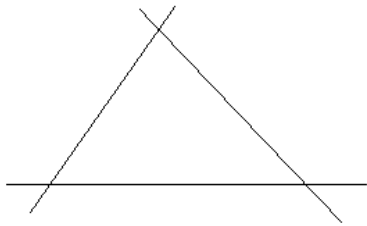
- pojęcie symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta, wysokości, środkowej trójkąta,
- nierówność trójkąta,
- cechy przystawania trójkątów,
- suma kątów wewnętrznych każdego trójkąta jest równa kątowi półpełnemu,
- kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

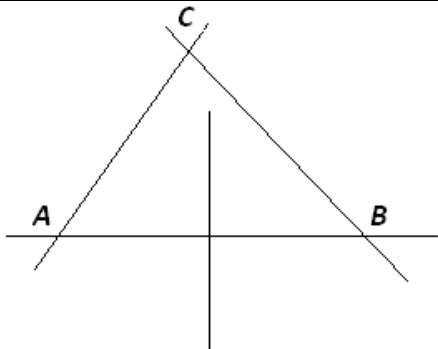
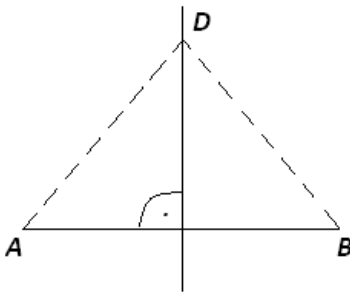
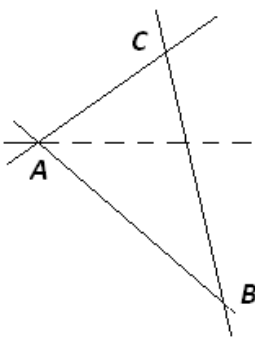
Posłużę się prostym sposobem zginania kartki, dzięki któremu uczeń może odkryć i udowodnić kilka podstawowych twierdzeń o trójkącie. Zakładam przy tym, że kartka jest modelem płaszczyzny, ślad dowolnego zgięcia jest modelem prostej, dwa przecinające się zgięcia wyznaczają punkt. W naturalny sposób prezentowane są na kartce inne pojęcia jak półpłaszczyzna, półprosta, kąt.

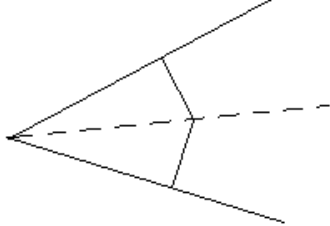
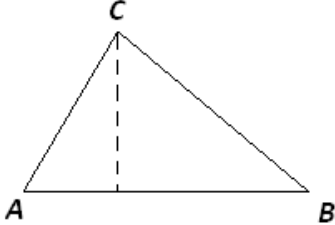
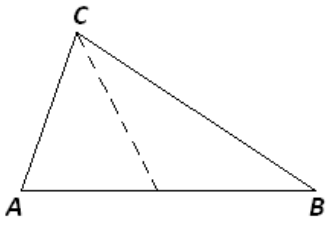
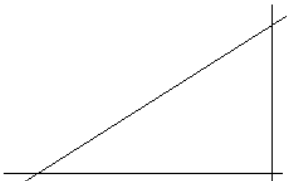
Rozważania te będą podane w dwóch kolumnach, by umożliwić jaśniejsze i bardziej przejrzyste przedstawienie podanych problemów. W kolumnie po lewej stronie zawarte są przykładowe pytania, zadania, problemy, a ich rozwiązania znajdują się po stronie prawej.

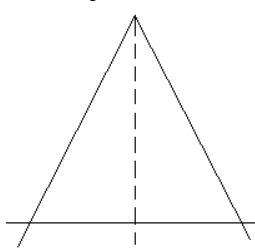
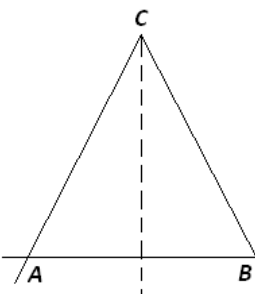
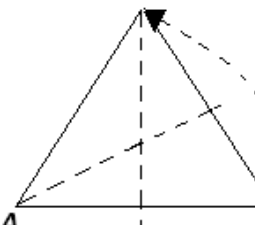
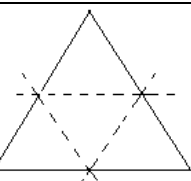
Przygotujmy zatem kilka kartek papieru.

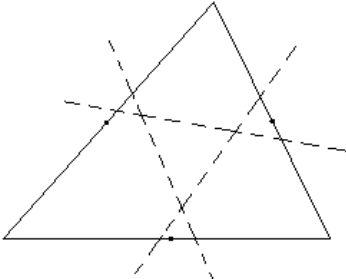
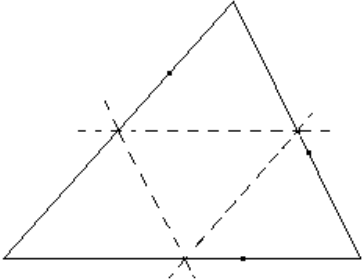
#### Podstawowe pojęcia związane z trójkątem i ich własności

<p>Zastanówmy się nad pewnymi problemami związanymi z trójkątem.</p> <p>W jaki sposób można skonstruować trójkąt przez zginanie kartki?</p>	<p>By otrzymać trójkąt wystarczy, że skonstruujemy trzy proste parami przecinające się. Jego wierzchołkami będą punkty przecięcia się tych prostych.</p> 
<p>Czy potrafimy zbudować symetralną boku dowolnego trójkąta, dwusieczną jego kąta,</p>	<p>Symetralną boku trójkąta będzie prosta powstała przez nałożenie na siebie dwóch jego wierzchołków</p>

<p>wysokość, środkową?</p>	
<p>Można by się zastanowić jeszcze nad własnościami symetralnej</p>	<p>Symetralna jest prostopadła do boku <math>\overline{AB}</math> i przechodzi przez jego środek. Zauważamy ponad to, że punkty symetralnej są równo odległe od obu końców odcinka <math>\overline{AB}</math></p>  <p>Możemy się o tym przekonać zginając kartkę wzdłuż symetralnej. Odcinki <math>\overline{AD}</math> i <math>\overline{BD}</math> nakładają się na siebie, są więc co do długości równe. Punkt <math>D</math> był dowolnie wybrany, więc własność ta dotyczy każdego punktu symetralnej.</p> <p>Gdy weźmiemy dowolny punkt leżący poza symetralną, będzie on leżał bliżej jednego z końców odcinka. Zatem jedynymi punktami płaszczyzny równo odległymi od końców odcinka są punkty symetralnej.</p>
<p>Jak skonstruować dwusieczną kąta w trójkącie?</p>	<p>Dwusieczna kąta będzie to prosta powstała przez nałożenie na siebie dwóch prostych zawierających boki trójkąta w ten sposób, by wierzchołek kąta należał do zgięcia.</p> 
<p>Zastanówmy się teraz nad własnościami dwusiecznej.</p>	<p>Dwusieczna dzieli kąt na dwa kąty równej miary i każdy punkt dwusiecznej jest równoodległy od ramion kąta</p>

	 <p>Aby się o tym przekonać konstruujemy półprostą prostopadłą do ramion kąta o początku w dowolnym punkcie dwusiecznej. Gdy zegnijemy kartkę wzdłuż dwusiecznej przekonamy się, że odcinki wyznaczone przez ramiona kąta i dwusieczną nakładają się czyli są co do długości równe.</p>
<p>Jak konstruować wysokość trójkąta?</p>	<p>Wysokość trójkąta np. poprowadzona z wierzchołka <math>C</math> powstanie przez skonstruowanie prostej prostopadłej do boku <math>\overline{AB}</math> przechodzącej przez wierzchołek <math>C</math>.</p>  <p>Aby taką prostą skonstruować nakładamy na siebie zgięcie, które powstało przy konstrukcji boku <math>\overline{AB}</math>, ale w ten sposób, by zgięcie tworzone przechodziło przez wierzchołek <math>C</math>.</p>
<p>Jak konstruować środkową trójkąta?</p>	<p>Środkowa trójkąta będzie wyznaczone przez zgięcie przechodzące przez wierzchołek trójkąta i środek przeciwległego boku. Zaś środkiem boku będzie punkt powstały przez nałożenie na siebie jego końców.</p> 
<p>Czy potrafimy skonstruować trójkąt prostokątny?</p>	<p>Aby zbudować trójkąt prostokątny budujemy dwie proste prostopadłe i przecinamy je trzecią prostą.</p> 
<p>Czy potrafimy skonstruować</p>	<p>Aby zbudować trójkąt równoramienny wystarczy</p>

<p>trójkąt równoramienny?</p>	<p>wyznaczyć dwie przecinające się proste, następnie skonstruować dwusieczną kąta przez nie utworzonego i wyznaczyć prostą prostopadłą do dwusiecznej. Prosta ta będzie zawierała trzeci bok.</p>  <p>Można jeszcze w inny sposób skonstruować trójkąt równoramienny. Trzeba wyznaczyć odcinek <math>\overline{AB}</math> (jeden bok trójkąta) i skonstruować jego symetralną. Następnie połączyć dowolny punkt symetralnej z końcami odcinka <math>\overline{AB}</math>. Utworzone odcinki <math>\overline{AB}</math> i <math>\overline{BC}</math> będą dwoma pozostałymi bokami.</p>  <p>Można zauważyć, że w trójkącie równoramiennym symetralna podstawy pokrywa się z dwusieczną kąta przeciwległego.</p>
<p>Czy potrafimy skonstruować trójkąt równoboczny?</p>	<p>Aby zbudować trójkąt równoboczny należy zaznaczyć jeden bok trójkąta <math>\overline{AB}</math> i poprowadzić symetralną tego boku. Następnie wystarczy unieruchomić koniec odcinka np. punkt <math>A</math> i złożyć kartkę tak, aby drugi punkt <math>B</math> trafił na symetralną. Punkt znaleziony w ten sposób jest trzecim wierzchołkiem trójkąta.</p> 
<p>Zegnijmy kartkę tak, aby wierzchołki trójkąta równobocznego nakładały się na środki przeciwległych boków. Co ciekawego zauważymy?</p>	 <p>Zauważamy, że w wyniku wykonanej konstrukcji,</p>

	<p>trójkąt został podzielony na cztery przystające do siebie trójkąty równoboczne o boku równym co do długości połowie boku trójkąta wyjściowego.</p>
<p>Czy analogiczne postępowanie można zastosować dla dowolnego trójkąta?</p>	<p>Trzeba najpierw zastanowić się, na jakie punkty należy nałożyć wierzchołki trójkąta. W trójkącie równobocznym punktem tym był zarówno środek boku jak i punkt przecięcia wysokości z bokiem trójkąta, punkt wspólny dwusiecznej i boku.</p> <p>Spróbujmy obrać za szukany punkt środek boku trójkąta.</p>  <p>Konstrukcja ta nie wskazuje na nic szczególnego.</p>
	<p>Weźmy zatem punkt przecięcia wysokości z bokiem trójkąta.</p>  <p>Analogicznie jak w przypadku trójkąta równobocznego w wyniku wykonanej konstrukcji otrzymaliśmy cztery przystające trójkąty o bokach równoległych do odpowiednich boków danego trójkąta.</p> <p>Opierając się też na przystawaniu tych trójkątów i równoległości odpowiednich boków stwierdzamy, że wierzchołki trójkąta wewnętrznego pokrywają się ze środkami boków trójkąta wyjściowego i długość boku trójkąta wewnętrznego jest dwa razy krótsza od długości równoległego do niego boku trójkąta wyjściowego.</p>
<p>Czy wobec powyższych rozważań można sformułować jakieś twierdzenie?</p>	<p><b>„Odcinek powstały przez połączenie środków dwóch boków trójkąta jest równoległy do boku trzeciego i jest dwa razy od niego krótszy”</b></p>